

12. cvičení - řešení

Využíváme známého faktu, že pro $f \in \mathcal{C}^2$ platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Příklad 1 (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y\end{aligned}$$

$$\nabla f = 0 \implies x = y = 0$$

Tedy stacionární body jsou: $(0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= 2\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(0, 0)$ je zřejmě PD. Tedy dle Věty 10.1 plyne, že $(0, 0)$ je bod lokálního minima.

Příklad 1 (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 - 2x - 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4y^3 - 2x - 2y\end{aligned}$$

Stacionární body (tj. $\nabla f = 0$) jsou: $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= 12x^2 - 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= 12y^2 - 2\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Vyšetřeme definitnost $\nabla^2 f$ ve stacionárních bodech.

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{sym. ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{NSD}$$

$$\nabla^2 f(1,1) = \nabla^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \underset{\text{sym. ú.}}{\sim} \Pi' = 5/2 \text{ I} + \Pi \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \quad \text{PD}$$

Dle Věty 10.1 jsou body $(1,1), (-1,-1)$ body lokálního minima. O bodu $(0,0)$ nemůžeme pomocí téže věty nic rozhodnout. Zkusme ověřit definici extrému.

Nejdříve vyšetřeme chování funkce f na přímkách $y = x$ a $y = -x$.

$$f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \implies \text{bod } (0,0) \text{ je ostré lok. max.}$$

$$f(x, -x) = 4x^4 - 2x^2 + 2x^2 = 4x^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) = 4x^3 \implies \text{bod } (0,0) \text{ je ostré lok. min.}$$

Z definice pak plyne, že bod $(0,0)$ není ani lok. min., ani lok. max fce f . Podrobněji:

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak z definice ostrého lokálního extrému existují body $x_1 = (a, a), x_2 = (b, -b) \in B((0,0), \varepsilon)$ takové, že $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0 = f(0,0)$, tedy bod $(0,0)$ není lokálním extrémem fce f .

Příklad 1 (c) $f(x, y) = x^2 - (y + 1)^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(y + 1) = -2y - 2 \end{aligned}$$

$$\nabla f = 0 \implies x = 0, y = -1$$

Tedy stacionární body jsou: $(0, -1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= -2 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ID}$$

Dle Věty 10.1 bod $(0, -1)$ není lokálním extrémem.

Příklad 1 (d) $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 12y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y + 12x \end{aligned}$$

$$\nabla f = 0 \implies (y = -6x \wedge 3x^2 - 12 \cdot 6x = 0) \implies (x = y = 0 \vee x = 24, y = -144)$$

Tedy stacionární body jsou: $(0, 0), (24, -144)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= 2\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Vyšetřeme definitnost $\nabla^2 f$ ve stacionárních bodech.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{sym. ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{sym. ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{14 \cdot 14}{26} \end{pmatrix} \quad \text{ID} \\ \nabla^2 f(24, -144) &= \begin{pmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{sym. ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{PD}\end{aligned}$$

Z Věty 10.1 usuzujeme, že $(0, 0)$ není lok. extrém a $(24, -144)$ je lok. min.

Příklad 1 (e) $f(x, y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^2 - 2x - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 + 2yx\end{aligned}$$

Tedy stacionární body jsou: $(-2, 0), (-\frac{3}{2}, 1), (6, -4)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= -2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= 6y + 2x\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 6y + 2x \end{pmatrix}$$

Vyšetřeme definitnost $\nabla^2 f$ ve stacionárních bodech.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(-2, 0) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ND} \\ \nabla^2 f\left(-\frac{3}{2}, 1\right) &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{sym.} \sim \text{ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ID} \\ \nabla^2 f(6, -4) &= \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} \stackrel{\text{sym.} \sim \text{ú.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{ID}\end{aligned}$$

V 10.1 $(-2, 0)$ lok. max., zbytek ne lok. extr.

Příklad 1 (f) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 3x^2 + 12y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2y + 12x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 2z + 2\end{aligned}$$

Tedy stacionární body jsou: $(0, 0 - 1), (24, -144, -1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y, z) &= 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y, z) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}(x, y, z) &= 2\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vyšetřeme definitnost $\nabla^2 f$ ve stacionárních bodech.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(0, 0, -1) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{sym. ú.:}}{\sim}} \begin{pmatrix} 26 & 14 & 0 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{sym. ú.:}}{\sim}} \begin{pmatrix} 26 & 14 & 0 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \\
&\underset{\sim}{\overset{\text{sym. ú.:}}{\sim}} \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{14 \cdot 14}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ID} \\
\nabla^2 f(24, -144, -1) &= \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{sym. ú.:}}{\sim}} \begin{pmatrix} 144 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{PD}
\end{aligned}$$

V 10.1 $\implies$ $(0, 0, -1)$ ne lok. extr., $(24, -144, -1)$ lok. minimum.